



20. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
05 - 09 Eylül 2017, Uludağ Üniversitesi, Bursa

SICAKLIK ETKİSİ ALTINDAKİ BİR PLAĞIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Yusuf Ziya Yüksel¹, Şeref Doğuşcan AKBAŞ² ve İlker Fatih Kara³
^{1,2,3} Bursa Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bursa

ABSTRACT

In this study, the free vibration analysis of a plate is presented with temperature rising. In obtaining of the governing equations, the Hamilton's principle and Kirchhoff-Love plate theory are used. In solution of the problem, the Navier method is implemented. The natural frequencies are obtained for different material under uniform temperature rising. In the obtaining of the numerical results and graphs, MATLAB program is used. In the numerical results, the natural frequencies of the plate are obtained with temperature rising and the difference between the temperature dependent and independent material properties is investigated.

ÖZET

Bu çalışmada, kenarlarından basit mesnetli basit bir plağın üniform sıcaklık artışı ile birlikte serbest titreşimi incelenmiştir. Hareket denklemlerinin çıkarılmasında Hamilton prensibi kullanılmış olup, Kirchhoff-Love plak teorsisi çerçevesinde Navier yöntemi ile problem çözülmüştür. Farklı malzemeler kullanılarak, sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedeği durumlara göre doğal frekanslar elde edilip kıyaslanmıştır. Sayısal sonuçların ve grafiklerin elde edilmesinde MATLAB programı kullanılmıştır. Farklı malzemeler kullanılarak, sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedeği durumlara göre doğal frekanslar elde edilip kıyaslanmıştır.

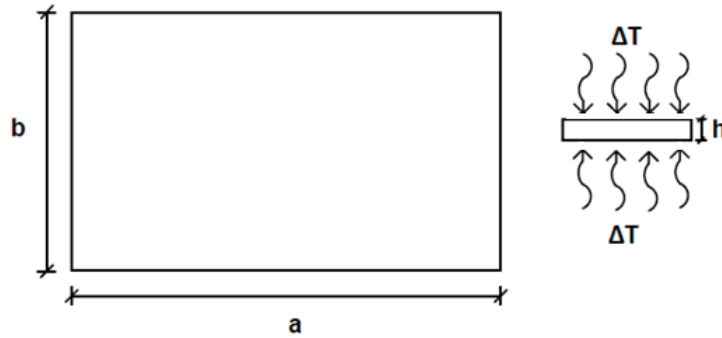
GİRİŞ

Termik santraller, nükleer santraller, ısı merkezleri, kimyasal tesisler gibi yapılarda sıcaklık etkisi önemli bir problemdir. Bu tür yapıları oluşturan yapısal elemanların sıcaklık etkisi altındaki davranışlarını iyi bilinmesi gerekmektedir. Bu tür yapılarda sıkça kullanılan plak taşıyıcı elemanlarda, artan sıcaklık etkisi ile birlikte mekanik davranışları önemli derecede değişmektedir. Literatürde konu ile ilgili yapılmış çalışmalarda; Liu ve Huang [1] tabakalı kompozit plakların sıcaklık değişimi ile birlikte titreşim özelliklerini birinci mertebeden kayma deformasyon teorisini kullanarak sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Sivakumar ve Iyengar [2] tabakalı kompozit plakların büyük genlikli serbest titreşim analizini yapmıştır. Onkar ve Yadav [3] ortotropik tabakalı kompozit plakların geometrik doğrusal olmayan titreşimini incelemiştir. Singha ve Daripa [4] Reddy'nin Genelleştirilmiş Tabaka Teorisini kullanarak tabakalı kompozit plakların serbest titreşim analizini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Matsunaga [5] Tabakalı kompozit ve termal yüklemeye tabi tutulan sandviç plakalar için serbest titreşim analizlerini yapmış ve sürekli yer değiştirme problemleri için

genişleyen güç serileri metoduyla çözümler yapmıştır. Civalek [6] birinci mertebeden kayma deformasyon teorisine dayanarak orta kalınlıkta simetrik tabakalı kompozit plakların titreşim analizini, ayrık tekil dönüşüm yöntemi ile çözerek, elde ettiği sonuçları diğer sayısal ve analitik yöntemlerle kıyaslamıştır. Amabili ve Farhadi [7] izotropik tabakalı kompozit dikdörtgen plakların doğrusal olmayan titreşim davranışlarını, Von Karman doğrusal olmayan kinematik teorisi ile yüksek mertebeden plak teorileri ile incelemiştir. Kuo ve Shiau [8] değişken fiber aralıklı tabakalı kompozit plakların burkulma ve titreşimlerini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Houmat [9] tabakalı kompozit dikdörtgen plakların geometrik olarak doğrusal olmayan serbest titreşimlerini Von Karmann'ın doğrusal olmayan kinematik bağıntı ve ince plak teorisi kullanarak hiyerarşik sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak çözmüştür. Marjanović ve Vuksanović [10] düzensiz sınır koşullarına sahip orta kalınlıktaki tabakalı kompozit dikdörtgen plakanın serbest titreşim analizi için geliştirilmiş bir Fourier serisi yöntemi ile çözmüştür. Joshi vd. [11] çatlak oluşmuş dikdörtgen izotropik ve fonksiyonel derecelenmiş mikro plakaların termal ortamda serbest titreşimi için klasik olmayan bir analitik model sunarak çözmüştür. Bu çalışmada, Kenarlarından basit mesnetli basit bir plağın üniform sıcaklık artışı ile birlikte serbest titreşimi incelenmiştir. Hareket denklemlerinin çıkarılmasında Hamilton prensibi kullanılmış olup, Kirchhoff-Love plak teorsisi çerçevesinde Navier yöntemi ile problem çözülmüştür. Farklı malzemeler kullanılarak, sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedikleri durumlara göre doğal frekanslar elde edilip kıyaslanmıştır. MATLAB programı kullanılarak formülasyonlar kodlanıp, çözdürülüp, grafikler elde edilmiştir.

FORMÜLASYON

Şekil 1'de uzunlukları, a ve b , kalınlığı h olan homojen ve izotrop, üniform sıcaklık artışına maruz dikdörtgen bir plak gösterilmiştir.



Şekil 1. Üniform sıcaklık artışına maruz dikdörtgen bir plak.

Kirchhoff-Love plak teorisine göre, yer-değiştirme-şekil değiştirme ilişkileri izleyen şekilde ifade edilmiştir.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

Burada w plağın düşey yer değiştirmesidir. Plağa ait bünye denklemleri izleyen şekilde ifade edilmiştir.

$$\sigma_x = \frac{E(T)z}{1-\nu(T)^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu(T) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \sigma_y = \frac{E(T)z}{1-\nu(T)^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu(T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \tau_{xy} = -\frac{E(T)z}{1+\nu(T)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

Burada E Elastisite Modülü, ν Poisson oranı olup, sıcaklığa (T) bağlı değişmektedir. Deneysel araştırmalar sonucunda, herhangi bir malzemenin sıcaklığa bağlı olarak özelliklerinin (P) değişmesini ifade eden matematiksel model literatürde [12] izleyen şekilde tanımlanmıştır:

$$P(T) = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (3)$$

Burada, P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 , P_3 malzeme sabitleri olup, özellikle yüksek sıcaklıklarda daha belirgin olmaktadır. Çalışmada kullanılan Alüminyum Oksit ve Paslanmaz Çelik malzemelerine ait bu değerler çizelgeler 1-3 de gösterilmiştir. Bu tablo Reddy ve Chin [13]'den alınmıştır. Çizelge 1-3 deki değerler, Sıcaklık birimi olarak Kelvin (K) cinsinden verilmiştir.

Çizelge 1. Termal Genleşme Katsayıları [13]

Malzeme	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Alüminyum Oksit	6.8269×10^{-6}	0	1.838×10^{-4}	0	0
Paslanmaz Çelik	12.330×10^{-6}	0	8.086×10^{-4}	0	0

Çizelge 2. Poisson Oranları için Katsayılar [13]

Malzeme	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Alüminyum Oksit	0.2600	0	0	0	0
Paslanmaz Çelik	0.3262	0	-2.002×10^{-4}	3.797×10^{-7}	0

Çizelge 3. Elastisite Modülleri için Katsayılar [13]

Malzeme	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Alüminyum Oksit	349.55×10^9	0	-3.853×10^{-4}	4.027×10^{-7}	-1.673×10^{-10}
Paslanmaz Çelik	201.04×10^9	0	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0

Probleme ait şekil değiştirme enerjisi (U_i) ve kinetik enerji (T) izleyen şekilde ifade edilmiştir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (5)$$

Burada ρ kütle yoğunluğu olup sıcaklığa bağlıdır. 6 eşitliğine verilen denklem ile Hamilton prensibini kullanarak probleme ait hareket denklemi eşitlik 7'de verilmiştir.

$$\delta \int_0^t [T - U_i] dt = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho(T) h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7a)$$

$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (7b)$$

$$Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7c)$$

Burada Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_{xy} plak kesit tesirleri, D ise plak rijitliği olup izleyen şekilde ifade edilmişleridir:

$$Q_x = -D(T) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8a)$$

$$Q_y = -D(T) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8b)$$

$$M_x = -D(T) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu(T) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8c)$$

$$M_y = -D(T) \left(\nu(T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8d)$$

$$M_{xy} = -D(T) \left((1 - \nu(T)) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (8e)$$

$$D(T) = \left(\frac{E(T) h^3}{12(1 - \nu(T)^2)} \right) \quad (8f)$$

Eşitlik 8 de yer alan hareket denklemleri sadeleştirildiğine, aşağıda verilen eşitlik elde edilir:

$$D(T) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho(T) h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

Problemın çözümünde, Navier çözümü kullanılmıştır. Kenarlarından basit mesnetli plağın Navier çözümü için, yer değiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^m \sum_{m=1}^n A_{mn}(t) \sin(kx) \cos(ly) e^{-i\beta t} \quad m, n=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Burada A_{mn} sıfırdan farklı yer değiştirme katsayısı, $k = m\pi/a$, $l = n\pi/b$, β doğal frekans ve $i = \sqrt{-1}$ dir. Eşitlik 10, eşitlik (9)da yerine yazıldığında, izleyen denklem elde edilir:

$$\frac{\rho(T) h \omega^2}{D(T)} = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (11)$$

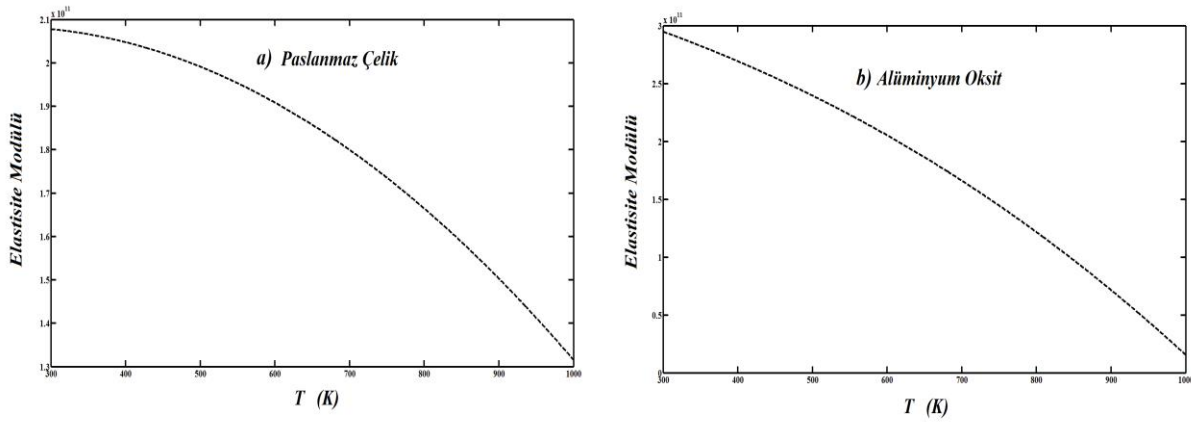
Eşitlik 11'deki denklemin çözümü ile plağa ait doğal frekans denklemi sıcaklığa bağlı izleyen şekilde elde edilir:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D(T)}{\rho(T)h}} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \quad (12)$$

SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçlarda, Paslanmaz Çelik ve Alüminyum Oksit malzemelerinden yapılmış plakların sıcaklık artışına bağlı olarak doğal frekansları elde edilmiş, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olma ve olmama durumları arasındaki fark incelenecektir. Paslanmaz Çelik ve Alüminyum Oksit ait sonuçların elde edilmesinde, Çizelge 1-3 de verilen malzeme değerleri kullanılmıştır. Kütle yoğunlukları olarak Paslanmaz Çelik için $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ ve Alüminyum Oksit $\rho=3950 \text{ kg/m}^3$ alınmıştır [13]. Sayısal hesaplarda, plak kare olarak alınmış olup uzunluklar $a=b=5 \text{ m}$ ve yükseklik $h=0.2 \text{ m}$ alınmıştır. Sayısal hesaplarda, sıcaklık birimi olarak Kelvin (K) kullanılmıştır. Sayısal sonuçların ve grafiklerin elde edilmesinde MATLAB programı kullanılmıştır.

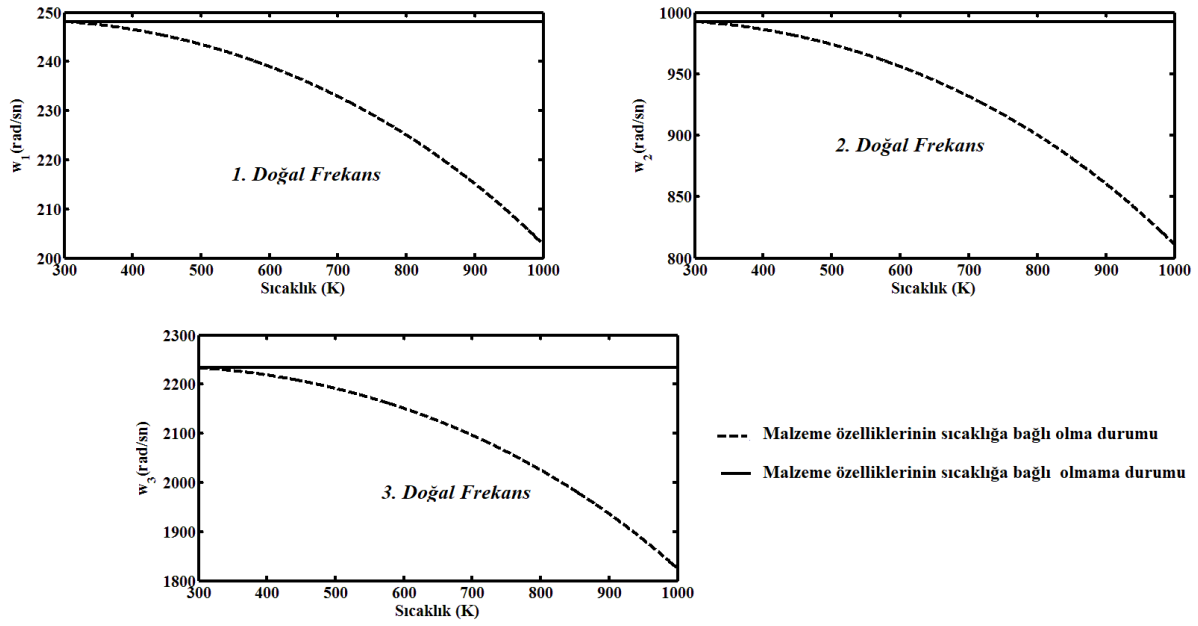
Şekil 2 de Elastisite Modülünün sıcaklık artışına bağlı değişimi Paslanmaz Çelik ile Alüminyum Oksit malzemeleri için sunulmuştur. Şekil 2 de görülmektedir ki, sıcaklığın artması ile birlikte malzemelerin Elastisite Modülü ciddi bir biçimde düşmektedir. Bilindiği gibi sıcaklığın artması ile birlikte moleküler arası mesafeleri artar ve dolayısıyla malzemenin dayanımı düşmektedir. Belli bir sıcaklık değerinden sonra malzemede erime yada mukavemetini kaybı oluşmaktadır.



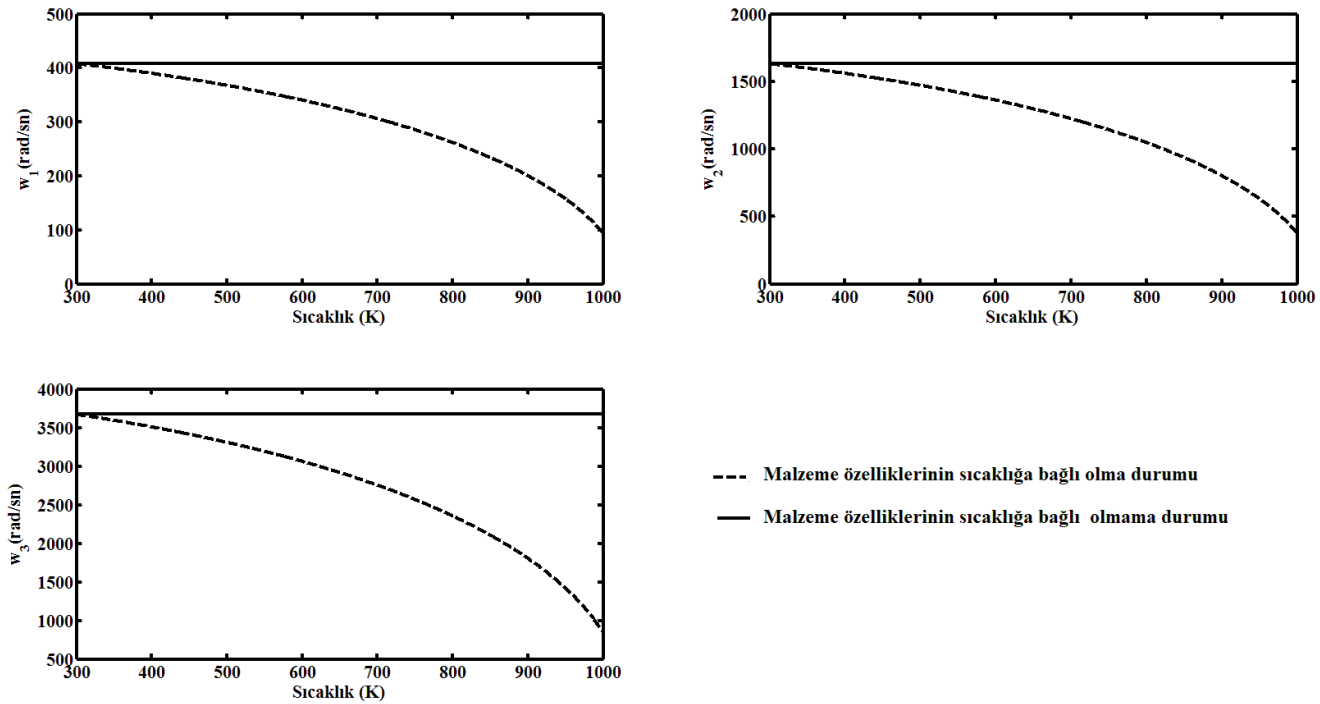
Şekil 2. Elastisite Modülünün sıcaklık artışına bağlı değişimi. a) Paslanmaz Çelik b) Alüminyum Oksit.

Şekil 3 ve 4'de plak malzemesinin Paslanmaz Çelik ve Alüminyum Oksit olması durumunda, ilk üç doğal frekansları sıcaklık artışına bağlı olarak sunulmuştur. Burada, sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedikleri durumlar arasındaki fark incelenmiştir. Şekil 3 ve 4 de görüldüğü gibi, sıcaklığın artması ile iki model arasındaki fark ciddi bir biçimde artmaktadır. Doğal frekanslar gerçek durum olan malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olma durumunda daha düşük çıkmaktadır. Sıcaklığın çok yüksek olması ile aradaki fark ihmal edilmeyecek mertebelerde olmaktadır. Sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirmedikleri varsayarak, bir yapı elemanının mekanik davranışının incelenmesi ve tasarımı gerçekçi

olmayacaktır. Yüksek sıcaklığa maruz bir yapı elamanının tasarımında, mutlaka sıcaklığın malzeme özelliklerine etkidiği durum göz önüne alınmalıdır.



Şekil 3. Paslanmaz Çelikten yapılmış plağa ait ilk üç doğal frekansın sıcaklık artışına bağlı değişimi.



Şekil 4. Alüminyum Oksit den yapılmış plağa ait ilk üç doğal frekansın sıcaklık artışına bağlı değişimi.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, kenarlarından basit mesnetli basit bir plağın üniform sıcaklık artışı ile birlikte serbest titreşimi incelenmiştir. Farklı malzemeler kullanılarak, sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedikleri durumlara göre doğal frekanslar elde edilip kıyaslanmıştır. Hareket denklemlerinin çıkarılmasında Hamilton prensibi kullanılmış olup, Kirchhoff-Love plak teorisi çerçevesinde Navier yöntemi ile problem çözülmüştür. Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, yüksek sıcaklık değerleri için sıcaklığın malzeme özelliklerinin değiştirdiği ve değiştirmedikleri durumlar arasındaki fark ihmal edilmeyecek mertebelerde olmaktadır. Yüksek sıcaklığa maruz böylesi yapısal elemanların mekanik davranışlarının incelenmesinde, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkidiği durum göz önüne alınmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] C. F. Liu, C. H. Huang, Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes, *Computers & structures*. 60 (1) (1996) 95-101.
- [2] K. Sivakumar, N. G. R. Iyengar, K. Deb, Free vibration of laminated composite plates with cutout, *Journal of Sound and Vibration*. 221 (3) (1999) 443-470.
- [3] A. K. Onkar, D. Yadav, Non-linear free vibration of laminated composite plate with random material properties, *Journal of Sound and Vibration*. 272 (3) (2004) 627-641.
- [4] M. K. Singha, R. Daripa, Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 42 (9) (2007) 1144-1152.
- [5] H. Matsunaga, Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading, *Composite structures*. 77 (2) (2007) 249-262.
- [6] Ö. Civalek, Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method, *Finite Elements in Analysis and Design*. 44 (12) (2008) 725-731.
- [7] M. Amabili, S. Farhadi, Shear deformable versus classical theories for nonlinear vibrations of rectangular isotropic and laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*. 320 (3) (2009) 649-667.
- [8] S. Y. Kuo, L. C. Shiau, Buckling and vibration of composite laminated plates with variable fiber spacing, *Composite Structures*. 90 (2) (2009) 196-200.
- [9] A. Houmat, Nonlinear free vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers, *Composite Structures*. 106 (2013) 211-224.
- [10] H. Zhang, D. Shi, Q. Wang, An improved Fourier series solution for free vibration analysis of the moderately thick laminated composite rectangular plate with non-uniform boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*. 121 (2017) 1-20.
- [11] P. V. Joshi, A. Gupta, N. K. Jain, R. Salhotra, A. M. Rawani, G. D. Ramtekkar, Effect of thermal environment on free vibration and buckling of partially cracked isotropic and FGM micro plates based on a non classical Kirchhoff's plate theory: An analytical approach, *International Journal of Mechanical Sciences*. 131 (2017) 155-170.
- [12] Y.S. Touloukian, *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, Macmillan, New York, 1967.
- [13] Reddy, J.N., Chin, C.D., Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 1998: 21, 593-626.